CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XVIII-A–13 MAI 2017

CLASA A IX-A

1. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale nenule. Spunem că șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ formează o progresie armonică dacă $\frac{2}{a_k}=\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k+1}}, \forall k\geq 2$. Dacă $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie armonică, demonstrați:

a) $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică;

b) $\frac{a_k-a_{k+1}}{d}=a_k a_{k+1}, \forall k\geq 2$, unde am notat cu d rația progresiei $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq 1}$;

c) $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n=\left(n-1\right)a_1a_n, \forall n\geq 2$.

2. Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și $b=2+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

3. Se consideră funcția de gradul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relația:

$$f\left(x\right)+2f\left(2-x\right)=x+2, \forall x\in\mathbb{R}.$$

a) Determinați funcția f.

b) Reprezentați grafic funcția f.

c) Rezolvați ecuația $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+2$.

4. În triunghiul ABC considerăm punctele $M\in\left(AB\right), N\in\left(AC\right)$, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{5}$ și $\frac{AN}{NC}=\frac{3}{4}$. Fie $P\in\left(MN\right)$, astfel încât $\frac{MP}{PN}=\frac{2}{7}$ și $AP\cap BC=\left\{Q\right\}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$;

b) Să se arate că $\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AN}$;

c) Să se determine valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIȚIA A XVIII-A– 13 MAI 2017

BAREM DE CORECTARE-CLASA A IX-A

1. Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale nenule. Spunem că șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ formează o progresie armonică dacă $\frac{2}{a_k}=\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k+1}},\forall k\geq 2$. Dacă $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie armonică, demonstrați:

a) $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică;

b) $\frac{a_k-a_{k+1}}{d}=a_ka_{k+1},\forall k\geq 2$, unde am notat cu d rația progresiei $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq 1}$;

c) $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n=\left(n-1\right)a_1a_n,\forall n\geq 2$.

a) $\frac{2}{a_k}=\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k+1}}\Leftrightarrow\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}\overset{not}{=}d$, de unde concluzia………………...………..2p
b) Demonstrează $\frac{a_k-a_{k+1}}{d}=a_ka_{k+1}$ ………………………………………………………….…2p
c) Arată $a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n=\frac{a_1-a_n}{d}$, finalizare ………….……………………………..3p

2. Se consideră numerele reale $a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și $b=2+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

a) $a=\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$, $b=2+2+\sqrt{2}=4+\sqrt{2}$, de unde concluzia…………..…3p
b) $\frac{a+b}{2}=4,\sqrt{ab}=\sqrt{\left(4+\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{14}$ ………………………………………………4p

3. Se consideră funcția de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relația:

$$f\left(x\right)+2f\left(2-x\right)=x+2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

a) Determinați funcția f.

b) Reprezentați grafic funcția f.

c) Rezolvați ecuația $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+2$.

a) Deduce $f\left(x\right)=-x+2,\forall x\in\mathbb{R}$ …………………………..…………………………..……….2p
b) Reprezintă grafic funcția…….……………………………………………………………...…2p
c) Rezolvă ecuația și obține $x=2$ …………………………………………………………3p

4. În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB), N \in (AC)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$ și $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{4}$. Fie $P \in (MN)$, astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7}$ și $AP \cap BC = \{Q\}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$;

b) Să se arate că $\overrightarrow{AP} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AN}$;

c) Să se determine valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$.

a) Demonstrează relațiile ……………………………………………………………….2p
b) Demonstrează relația……………………………………………………………...…..3p
c) Determină $\overrightarrow{AP} = \frac{7}{54}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{21}\overrightarrow{AC}$; $\frac{BQ}{QC} = k \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$ ………………..1p
Impune condiția de coliniaritate $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AQ} \Rightarrow k = \frac{36}{49}$ ……………………………………….1p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.