CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIȚIA A XVIII-A, 13 MAI 2017

CLASA A XII-A

1. Fie mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Să se calculeze $(A(2))^{2017}$.

c) Știind că $(G,\cdot)$ este grup abelian, să se arate că $(G,\cdot) \simeq (\mathbb{R},+)$

2. Fie polinomul $f_{a,b} \in \mathbb{R}[X]$, $f_{a,b} = 2a^2X^3 - 2abX^2 + b^2X - (2a-1)$

a) Determinați numerele întregi *a* și *b* pentru care $f_{a,b} \vdots (X-1)$;

b) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f_{1,1}$, calculați $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 \cdot 8^x - 2^{2x+1} + 2^x - 1 = 0$.

3. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$.

a) Calculați I_1.

b) Să se demonstreze că $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Utilizând eventual inegalitatea $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x+2} \le \frac{1}{2}, \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{3} \le 2018 \cdot I_{2017} \le \frac{1}{2}$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x < 0 \\ \frac{1}{x+2} - \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$

a) Să se demonstreze că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.
Timpul de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIȚIA A XVIII-A, 13 MAI 2017

BAREM DE CORECTARE CLASA A – XII-A

1. Fie mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Să se calculeze $(A(2))^{2017}$.

c) Știind că $(G,\cdot)$ este grup abelian, să se arate că $(G,\cdot) \simeq (\mathbb{R},+)$

a) Se arată că $\forall A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a)\cdot A(b) = A(a+b) \in G$	2p
b) Din a) avem $(A(a))^2 = A(2a)$ și se demonstrează prin inducție matematică că $(A(a))^n = A(na), n \in \mathbb{N}$. $(A(2))^{2017} = A(2017\cdot 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4034 \\ -4034 & 1 & -2017\cdot 4034 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1p 1p
c) Demonstrația bijectivității funcției $f : G \to \mathbb{R}, f(A(a)) = a, a \in \mathbb{R}$ Verificarea relației de morfism $f(A(a))\cdot f(A(b)) = f(A(a+b)) = a+b = f(A(a)) + f(A(b))$	2p 1p

2. Fie polinomul $f_{a,b} \in \mathbb{R}[X], f_{a,b} = 2a^2X^3 - 2abX^2 + b^2X - (2a-1)$

a) Determinați numerele întregi a și b pentru care $f_{a,b} \vdots (X-1)$;

b) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f_{1,1}$, calculați $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2\cdot 8^x - 2^{2x+1} + 2^x - 1 = 0$.

a) $f_{a,b} \vdots (X-1) \Leftrightarrow f_{a,b}(1) = 0, f_{a,b}(1) = 2a^2 - 2ab + b^2 + 2a + 1 = (a-b)^2 + (a-1)^2$ $(a-b)^2 + (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$	1p 1p
b) x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f_{1,1} = 2X^3 - 2X^2 + X - 1 = (X-1)(2X^2+1)$, $x_1 = 1, x_2 = i\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = -x_2 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$	1p 1p
c) $2\cdot 8^x - 2^{2x+1} + 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{3x} - 2\cdot 2^{2x} + 2^x - 1 = 0$ Notăm $2^x = t, t > 0 \Rightarrow 2\cdot t^3 - 2\cdot t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow$	1p 2p

$(t-1)(2t^2+1)=0 \Rightarrow t=1$ $2^x=1 \Rightarrow x=0$	

3. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+2}dx$.

a) Calculați I_1.

b) Să se demonstreze că $I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Utilizând eventual inegalitatea $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x+2}\le\frac{1}{2},\forall x\in[0,1],n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{3}\le 2018\cdot I_{2017}\le\frac{1}{2}$.

a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_0^1 dx-2\int_0^1\frac{1}{x+2}dx==$ $=\left(x-2\ln\left(x+2\right)\right)\Big\vert_0^1=1-2\ln\frac{3}{2}$	1p 1p
b) $I_{n+1}+2I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}+2x^n}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+2)}{x+2}dx=$ $=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$	1p 1p
c) Din $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x+2}\le\frac{1}{2},\forall x\in[0,1]\Rightarrow\frac{x^n}{3}\le\frac{x^n}{x+2}\le\frac{x^n}{2},\forall x\in[0,1],n\in\mathbb{N}^*$ Atunci $\int_0^1\frac{x^n}{3}dx\le I_n\le\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\Leftrightarrow\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n+1)}$ Pentru n=2017 se obține $\frac{1}{3}\le 2018\cdot I_{2017}\le\frac{1}{2}$	1p 2p

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2}, x<0\\ \frac{1}{x+2}-\sqrt{x}, x\ge 0\end{cases}$

a) Să se demonstreze că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

a) f este continuă pe $\mathbb{R}-\{0\}$ fiind formată din funcții elementare f este continuă în $x=0$ deoarece $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=\frac{1}{2}$,finalizare	1p 2p
b) $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0\frac{x+1}{2}dx+\int_0^1(\frac{1}{x+2}-\sqrt{x})dx$	1p

$\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{2}dx=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}+x)\Big\|_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$ $\int_{0}^{1}(\frac{1}{x+2}-\sqrt{x})dx=\ln(x+2)-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,)\Big\|_{0}^{1}=\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$	2p
$I=\ln\frac{3}{2}-\frac{5}{12}$	1p

Notă:

Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.