CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET" EDIŢIA A XVIII-A–13 MAI 2017

CLASA A XI-A

1. Pentru fiecare număr real m considerăm matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A(m)$ să fie inversabilă.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(m)^{-1} = A(m)^*$, unde am notat cu $A(m)^*$ adjuncta matricei $A(m)$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det\left(A(m)^{2018}\right)=1$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+ay+bz=1 \\ ax+y+bz=1 \end{cases}$, $a, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ şi A matricea sistemului.

a) Demonstrați că $\det(A)=(a+b+1)(a-1)(b-1)$.

b) Să se arate că pentru $b=1$ sistemul este compatibil.

c) Rezolvați sistemul pentru $a=b=2$.

3. a) Determinați valorile parametrilor reali $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care avem $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

b) Determinați valorile parametrilor reali $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-ax}{x^2+3x-4}=b$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{-3\} \to \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+2017}{(x+3)^2}, a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați asimptotele la graficul funcției *f*.

b) Determinați valoarea lui *a* pentru care tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă 1 este paralelă cu axa *Ox*.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIȚIA A XVIII-A– 13 MAI 2017

BAREM DE CORECTARE-CLASA A XI-A

1. Pentru fiecare număr real m considerăm matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $A(m)$ să fie inversabilă.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A(m)^{-1}=A(m)^*$, unde am notat cu $A(m)^*$ adjuncta matricei $A(m)$.

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det\left(A(m)^{2018}\right)=1$.

a) $\det(A)=3m^2+m-1$ ……………………………………..…………………………….1p $A(m)$ să fie inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det(A(m))\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}-\left\{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$ ……..………..…………2p
b) $A(m)^{-1}=A(m)^* \Leftrightarrow \det(A(m))=1 \Leftrightarrow 3m^2+m-2=0$ ………………………………….….1p Valorile căutate sunt $\left\{\frac{2}{3},-1\right\}$ …………………………………………………………....1p
c) $\det\left(A(m)^{2018}\right)=\left(\det A(m)\right)^{2018}$ ……………………………..……………..………...1p Finalizare $\det A(m)=\pm1 \Leftrightarrow m\in\left\{-\frac{1}{3},0,-1,\frac{2}{3}\right\}$ ………………..…………….…..……....1p

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+ay+bz=1, a,b\in\mathbb{R} \\ ax+y+bz=1 \end{cases}$ și A matricea sistemului.

a) Demonstrați că $\det(A)=(a+b+1)(a-1)(b-1)$.
b) Să se arate că pentru $b=1$ sistemul este compatibil.
c) Rezolvați sistemul pentru $a=b=2$.

a) Calculează $\det(A)$ …………………..……………………………………………….….2p
b) Tripletul $(0,0,1)$ este soluție indiferent de valoarea lui a……………………………………2p
c) Sistemul este de tip Cramer, scrie formulele lui Cramer……………….…………………..1p Rezolvă sistemul ………………………………………………………..………………….2p

3. a) Determinați valorile parametrilor reali $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care avem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

b) Determinați valorile parametrilor reali $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-ax}{x^2+3x-4}=b$.

a) Determină $a=1, b=-\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………...3p	
b) Determină $a=2$ ………………………………………………………………………...1p Determină $b=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2x}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x^2+x+2}{\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)(x-1)(x+4)}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(-3x-2)}{\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)(x-1)(x+4)}=-\frac{1}{4}$ ……………………………………………….……3p	

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{-3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+ax+2017}{(x+3)^2}, a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați asimptotele la graficul funcției *f*.
b) Determinați valoarea lui *a* pentru care tangenta la graficul funcției în punctul de abscisă 1 este paralelă cu axa *Ox*.

a) Determină dreapta de ecuație $x=-3$ asimptotă verticală și dreapta de ecuație $y=1$ asimptotă orizontală la $\pm\infty$ ………………………………………………………….. ……………..3p	
b) Calculează $f'(x)=\frac{(6-a)x+3a-4034}{(x+3)^3}$ …………………………………………….. …..2p	
Finalizare $f'(1)=0 \Leftrightarrow a=2014$ ………………………….…………………………………2p	

Notă:
Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.