CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XVIII-A–13 MAI 2017

CLASA A X-A

1. a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z = \dfrac{1+3i}{a-(a-1)i}$ este număr real.

b) Să se arate că $\left|z_1 \cdot \overline{z_2} + 1\right|^2 + \left|z_2 - z_1\right|^2 = \left(1 + \left|z_1\right|^2\right)\left(1 + z_2 \cdot \overline{z_2}\right), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1$.

a) Să se demonstreze că *f* este funcție injectivă.
b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 + \sqrt[3]{x} = 514$.
c) Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui *x* pentru care $f(x) > 3$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; b) $\dfrac{1}{1+\lg x} + \dfrac{3}{3+\lg x} = 2$.

4. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \log_{x-1}\left(\dfrac{2x+2}{x^2-5x+6}\right)$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție D.
b) Să se rezolve ecuația $f(x) = -1$.
c) Să se rezolve inecuația $f(x) < 0$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect primeşte un punctaj de la 0 la 7.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XVIII-A– 13 MAI 2017

BAREM DE CORECTARE-CLASA A X-A

1. a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z = \dfrac{1+3i}{a-(a-1)i}$ este număr real.

b) Să se arate că $\left|z_1 \cdot \overline{z_2} + 1\right|^2 + \left|z_2 - z_1\right|^2 = \left(1+\left|z_1\right|^2\right)\left(1 + z_2 \cdot \overline{z_2}\right), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) $z = \overline{z} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$ ……………………………………………………….…………………..3p
b) Demonstrează identitatea…………………………………………………….………..4p

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1$.

a) Să se demonstreze că *f* este funcție injectivă.
b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 + \sqrt[3]{x} = 514$.
c) Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui *x* pentru care $f(x) > 3$.

a) Arată că funcția este injectivă ………………………………………………………….…3p
b) $x^3 + \sqrt[3]{x} = 514 \Leftrightarrow f(x) = 515 \Leftrightarrow x = 8$ soluție unică……………………………………...2p
c) *f* strict crescătoare, $f(x) > 3 \Leftrightarrow x > 1$……………………………………………...……….2p

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; b) $\dfrac{1}{1+\lg x} + \dfrac{3}{3+\lg x} = 2$.

a) Notează $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = t, t > 0$ și obține ecuația echivalentă $3t^2 - 5t + 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………………4p
b) Condiții de existență……………………….…………………………..…...………………1p
Rezolvă ecuația, finalizare mulțimea soluțiilor este $\left\{1, \dfrac{1}{100}\right\}$ ……………………………….2p

4. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, f(x) = \log_{x-1}\left(\dfrac{2x+2}{x^2 - 5x + 6}\right)$.

a) Să se determine domeniul maxim de definiție D.
b) Să se rezolve ecuația $f(x) = -1$.
c) Să se rezolve inecuația $f(x) < 0$.

a) Obține $D = (1,2) \cup (3, \infty)$ ……………………………………………………….…....3p
b) $f(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{-5+\sqrt{57}}{2}$ ………………………………….…..2p
c) Rezolvă inecuația……………………….……………………………………………….2p

Notă:Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.